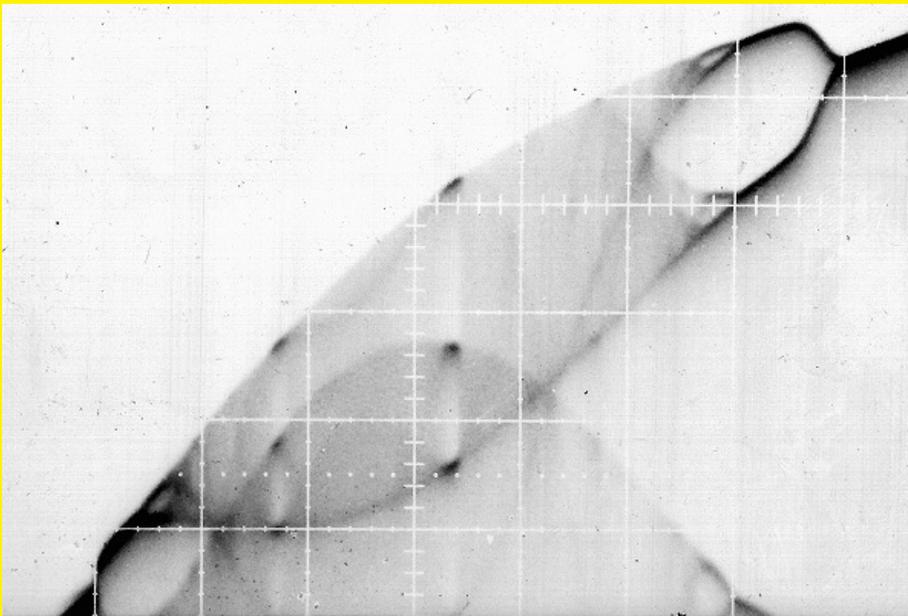


Uma Introdução à Teoria dos Sistemas Dinâmicos e do Caos

Rui Dilão



Versão de 26 de Julho 2018

This work is licensed under a [Creative Commons](#) “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International” license.



Índice

Prefácio	v
I Primeira parte	1
1 Equações diferenciais como sistemas dinâmicos	5
2 Estabilidade de pontos fixos	17
3 Equações às diferenças como sistemas dinâmicos	25
4 Classificação de pontos fixos	31
5 Sistemas hamiltonianos	41
5.1 Geometria de um oscilador harmónico	42
5.2 Teoria de Denjoy	50
5.3 Teorema KAM	54
6 Métodos numéricos	61
7 Atractores estranhos e aplicações do intervalo	71
7.1 O atractor de Lorenz	71
7.2 Aplicações do intervalo e o conceito de caos	76
7.3 Alguns resultados sobre a dinâmica das aplicações do intervalo	88
7.4 Atractores estranhos	92
8 As variedades estáveis, instáveis e centrais	97
9 Dinâmica na variedade central	113

10	Atratores estranhos em equações com retardo	119
11	Caracterização de atratores estranhos	127
12	Conjuntos limite e recorrência	133
13	Funções de Poincaré	139
14	O teorema de Poincaré-Bendixon	145
15	Bifurcações de equações diferenciais	151
16	Bifurcações de equações às diferenças	161
17	Intermitência	163
18	Dinâmica simbólica e dinâmicas lineares no toro	167
19	Autómatos celulares	175
20	Aplicações do plano complexo. Conjuntos fractais	183
21	Sistemas de funções iteradas	189
22	Caos	193
23	Expoentes de Lyapunov e teorema de Oseledets	205
II	Segunda parte	213
24	Ressonância paramétrica: o baloiço	215
25	O movimento de um robot	225
25.1	Movimento ao longo de uma superfície plana	225
25.1.1	Modelo básico	225
25.1.2	Movimento da perna não apoiada	230
25.2	Movimento ao longo de uma superfície irregular	232
25.2.1	Movimento ao longo de um plano inclinado	233
25.2.2	Movimento ao longo de uma superfície sinusoidal	233

26 Sincronização de pêndulos	235
26.1 As equações de sincronização	235
26.2 Sincronização de 2 pêndulos	238
26.3 Sincronização de 3 pêndulos	241
27 Sincronização de relógios	247
27.1 Um modelo de sincronização de dois relógios de pêndulo	248
27.2 Modelo simples para um relógio de pêndulo	251
27.3 Sincronização de dois relógios iguais	253
27.4 Sincronização de dois relógios com parâmetros diferentes: ro- bustez	265
28 Caos no problema de Störmer	269
28.1 Equações do movimento e leis de conservação	270
28.2 Movimento no plano equatorial do campo dipolar	274
28.3 Movimento tridimensional	279
29 Bilhares	289
30 Um modelo geométrico para o atractor de Lorenz	291
31 Introdução à mecânica celeste	293
31.1 O problema de N corpos	293
31.2 O problema dos dois corpos de Kepler	295
31.3 Integração numérica dos problemas dos 2 e dos 3 corpos	303
31.4 O problema restrito dos três corpos	307
31.5 O problema de Sitnikov e os movimentos caóticos	320
31.6 O haltere Kepleriano e a interacção spin-órbita	323
32 Introdução à teoria do controlo	331
32.1 O princípio do máximo de Pontriaguine	331
32.2 O equilibrista	342
32.3 Controlo óptimo de um modelo macroeconómico	348
III Apêndices	353
A Aspectos elementares de topologia	355
A.1 Topologia	355

A.2 Variedades	359
B Equações diferenciais lineares	367
B.1 Equações autónomas	367
B.2 Equações não autónomas	370
C Equações às diferenças lineares	373
D Transformações de escala	377
Bibliografia	379

Prefácio

As técnicas e os conceitos da teoria dos sistemas dinâmicos dão-nos as ferramentas matemáticas básicas para analisar a dinâmica dos sistemas não lineares e muitas vezes caóticos, que aparecem na física, na engenharia e na biologia.

O objectivo deste curso é introduzir a linguagem e as técnicas da teoria dos sistemas dinâmicos de dimensão finita. São abordados os vários aspectos da teoria dos sistemas dinâmicos, nas vertentes topológica, medidista e computacional. Usou-se alguma liberdade na linguagem formal, recorrendo apenas à demonstração quando existe vantagem algorítmica, ou pelo simples facto de um resultado ser simples e poderoso.

A primeira parte destas notas constituem um curso introdutório à teoria dos sistemas dinâmicos e podem ser ensinados durante um semestre, ao nível do mestrado. Na segunda parte, descrevem-se algumas aplicações da teoria dos sistemas dinâmicos.

Os primeiros onze capítulos da primeira parte foram escritos de modo a que, numa primeira leitura, se possa ter uma visão das técnicas da teoria dos sistemas dinâmicos, não requerendo uma formação matemática muito especializada. É introduzido o conceito de sistema dinâmico e interpreta-se uma equação diferencial como um fluxo no espaço de fases ou de estados de um sistema. É introduzido o conceito de estabilidade de pontos fixos para equações diferenciais e para equações às diferenças. Refere-se o conceito de estabilidade estrutural. Estudam-se alguns sistemas Hamiltonianos como fluxos em variedades compactas. Faz-se uma digressão sobre os métodos numéricos usados na integração de equações diferenciais. Introduce-se o conceito de atrator estranho e faz-se a associação com as aplicações ou mapas do intervalo. Neste contexto, os conceitos de duplicação de período e transição para o caos aparecem naturalmente. Estudam-se as variedades estáveis, instáveis e centrais associadas a pontos fixos, e introduzem-se os conceitos de pontos homoclínicos e heteroclínicos. Introduce-se as técnicas de blow-up de singula-

ridades. Introduzem-se as equações com retardo e faz-se um estudo baseado em exemplos simples.

A partir do capítulo 12, introduzem-se os conceitos e métodos da teoria qualitativa de sistemas de equações diferenciais não-lineares, dando uma atenção especial aos sistemas dinâmicos em dimensão 2. São introduzidos os conceitos de conjuntos α e ω -limite, conjuntos errantes e não-errantes, sistemas dinâmicos de Axioma A, mapas de Poincaré, ciclos limites e estuda-se a teoria de Poincaré-Bendixon para sistemas dinâmicos no plano. Faz-se uma abordagem pragmática à teoria das bifurcações das equações diferenciais e das equações às diferenças. É descrita a formulação básica dos autómatos celulares, dos conjuntos fractais em aplicações do plano complexo e dos sistemas iterados de funções.

Nos capítulos 22 e 23, define-se rigorosamente o conceito de caos. Estuda-se a ferradura de Smale como modelo protótipo de sistema caótico. É analisado o conceito de sensibilidade em relação às condições iniciais e introduzem-se os expoentes de Lyapunov através do teorema de Oseledets.

A segunda parte destas notas (capítulos 24-32) é dedicada a alguns aspectos das aplicações da teoria dos sistemas dinâmicos de dimensão finita. Exploram-se aplicações nas áreas da mecânica, electromagnetismo, mecânica celeste, teoria do controlo não-linear e modelos macroeconómicos.

Para eliminar a dependência destas notas de outros resultados mais especializados, nos apêndices, foram resumidos alguns resultados de topologia e variedades, técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias lineares e de equações às diferenças lineares.

Parte III
Apêndices

Apêndice A

Aspectos elementares de topologia

A.1 Topologia

Em análise, um dos primeiros conceitos que é introduzido é o de continuidade — continuidade de uma função, transformação ou aplicação. Para definir continuidade é necessário introduzir uma estrutura métrica sobre os domínios e contradomínios das funções, ou, mais geralmente, introduzir uma estrutura topológica. Nos espaços euclidianos, a métrica da distância induz uma topologia designada por topologia dos abertos.

Seja X um conjunto. Por exemplo, $X = \{0, 1\}$, $X = \mathbb{R}$ (reais) ou $X = \mathbb{Q}$ (racionais). Seja \mathcal{T} uma família de subconjuntos de X e suponha-se que os elementos de \mathcal{T} obedecem aos três axiomas:

- i) O conjunto X e o conjunto vazio \emptyset são ambos elementos de \mathcal{T} .
- ii) Se os conjuntos A e B são ambos elementos de \mathcal{T} , então $A \cap B$ é um elemento de \mathcal{T} .
- iii) Se $\{A_\alpha\}$ é uma família arbitrária de elementos de \mathcal{T} , então $\cup_\alpha A_\alpha$ é um elemento de \mathcal{T} .

Nas condições dos axiomas i)-iii), a família de subconjuntos \mathcal{T} define uma topologia sobre X . Diz-se assim que (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico. Os elementos de \mathcal{T} são, por definição, conjuntos abertos. Um conjunto C de um espaço topológico X é fechado se o seu complementar em X , $X - C$, é aberto.

Assim, $C \notin \mathcal{T}$. Subconjuntos de um espaço topológicos podem ser abertos, fechados, abertos e fechados e nem abertos nem fechados.

No que se segue, considera-se que os espaços topológicos são *separados* ou de Hausdorff: (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico de Hausdorff se, para todo o $a, b \in X$, com $a \neq b$, existem subconjuntos $V(a)$ e $V(b)$ contendo, respectivamente, a e b e tais que, $V(a) \cap V(b) = \emptyset$.

Sejam X e Y espaços topológicos separados e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. Diz-se que $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* se, e somente se, $f^{-1}(V)$ é um aberto de X sempre que V é um aberto de Y . Por outras palavras, a função f é contínua se a pré-imagem de um conjunto aberto é sempre aberta. Se A é um conjunto aberto de X , então $f(A)$ não é necessariamente aberto. Por exemplo, com $f(x) = \exp(-x^2)$, $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$.

Uma métrica definida num conjunto X induz uma topologia sobre X . Seja X um conjunto e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função que satisfaz os axiomas:

- i)** Se $x_1, x_2 \in X$, então $d(x_1, x_2) \geq 0$. Se $d(x_1, x_2) = 0$, então $x_1 = x_2$ (separabilidade).
- ii)** $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$, para todo o $x_1, x_2 \in X$ (simetria).
- iii)** $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$, para todo o $x_1, x_2, x_3 \in X$ (desigualdade triangular).

O conjunto X juntamente com a métrica $d(\cdot, \cdot)$ é um espaço métrico separado — (X, d) . São exemplos de espaços métricos:

- a)** \mathbb{R}^n , com $d(x, y) = |\sum(x_i - y_i)^2|^{1/2}$.
- b)** $X = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é limitada}\}$, com $d(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$.
- c)** $GL(2, \mathbb{R}) = \{\text{Matrizes de } 2 \times 2 \text{ com determinante não nulo}\}$, com $d(A, B) = \sup_{|x|=1} |Ax - Bx|$.
- d)** Métrica discreta: X arbitrário e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$; $d(x, y) = 0$ se $x = y$.

Seja uma função $f : A \rightarrow B$ em que A e B são espaços métricos. A função f é contínua no ponto $x_0 \in A$ se, para todo o $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$d_A(x_0, x) < \varepsilon \implies d_B(f(x_0), f(x)) < \delta.$$

A função f é contínua se é contínua em todos os pontos de A . Pode-se mostrar que esta definição é equivalente à definição dada anteriormente. Uma função

$f : A \rightarrow B$ em que A e B são espaços métricos é uniformemente contínua se ε pode ser escolhido apenas como função de δ em todo o domínio A . Se ε é função de x_0 e de δ , então f é apenas contínua. Por exemplo, para $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ é uniformemente contínua, mas $f(x) = x^2$ é apenas contínua.

Uma função $f : A \rightarrow B$, em que A e B são espaços métricos, é Hölder contínua com expoente α , em que $0 < \alpha \leq 1$, se existir uma constante k tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha.$$

Se $\alpha = 1$, a função f diz-se Lipschitziana. Claro está que toda a função Hölder contínua é uniformemente contínua, mas o inverso não é verdadeiro. Estendendo a definição anterior para $\alpha > 1$ decorre que toda a função Hölder contínua de ordem $\alpha > 1$ é uma função constante. De facto, se $\alpha > 1$, $|f(x+h) - f(x)|/|h| \leq k|h|^{\alpha-1}$, convergindo para zero quando h tende para zero. Por outro lado, se $\alpha = 1$, toda a função Lipschitziana tem derivada finita.

No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , uma bola aberta de raio r e centro x_0 é definida através de

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < r\}.$$

O conjunto $\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0\}$ gera uma topologia em (\mathbb{R}^n, d) — topologia de abertos — e portanto (\mathbb{R}^n, d) é um espaço topológico separado.

A caracterização de abertos e fechados pode ser feita através de vizinhanças. O conjunto $\mathcal{V}(x)$ é uma vizinhança do ponto $x \in X$ se $\mathcal{V}(x)$ contem um aberto que contem x . Um conjunto $A \subset X$ é aberto se, para todo o $x \in A$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}(x) \subset A$.

Uma família de subconjuntos abertos $\{A_i\}$ de um espaço topológico X é uma cobertura de X se $\cup A_i = X$. Um espaço topológico X é compacto se toda a cobertura de abertos de X contem uma subcobertura finita. A caracterização dos conjuntos compactos em \mathbb{R}^n é feita pelo teorema de Heine-Borel:

Teorema A.1 (Heine-Borel). *Um subconjunto de \mathbb{R}^n é compacto se é fechado e limitado.*

O produto infinito de conjuntos compactos é ainda compacto:

Teorema A.2 (Tychonov). *O produto finito ou infinito numerável de conjuntos compactos é compacto.*

Um espaço topológico X é *conexo* se não existir uma decomposição da forma $X = A \cup B$ em que A e B são abertos e $A \cap B = \emptyset$.

Um conjunto A é *denso* em X se qualquer vizinhança de um ponto $x \in X$ contem um ponto de A .

Uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejectiva* se todo o ponto de $b \in B$ é imagem de um ponto de $a \in A$ ($b \in B \implies$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$). A função $f : A \rightarrow B$ é *injectiva* se $f(a) = f(b) \implies a = b$. Uma função é *bijectiva* se é simultaneamente sobrejectiva e injectiva.

Sejam S e T espaços topológicos separados e $f : S \rightarrow T$ uma bijecção. Se f e f^{-1} são ambas contínuas, então f é um *homeomorfismo* e S e T dizem-se *topologicamente equivalentes*.

Uma transformação de variáveis define uma equivalência topológica. Assim, dadas duas funções $f, g : S \rightarrow T$, f e g são topologicamente equivalentes se existirem homeomorfismos

$$h : S \rightarrow S \quad \text{e} \quad k : T \rightarrow T$$

tais que

$$g \circ h = k \circ f \quad \Leftrightarrow \quad g = k \circ f \circ h^{-1}.$$

Estas relações são representadas pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ S & \rightarrow & T \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ S & \rightarrow & T \\ & g & \end{array}$$

Afirmar que h e k são homeomorfismos é o mesmo que dizer que o diagrama acima é comutativo. Se $S = T$, então $h = k$.

Um *difeomorfismo* de classe C^r é uma bijecção $f : T \rightarrow S$ em que f e f^{-1} são ambas r vezes diferenciáveis. Se f e f^{-1} são ambas analíticas então f é um difeomorfismo analítico ou de classe C^ω . Diferenciabilidade de grau infinito e analiticidade não são conceitos equivalentes: uma função pode ser infinitamente diferenciável mas a sua série de Taylor pode não convergir para ela. É o caso da função $f(x) = e^{-1/x}$, para $x \geq 0$, e $f(x) = 0$, para $x < 0$: a série de Taylor de $f(x)$ calculada no ponto $x = 0$ não converge para f .

A1.1) Sejam as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$. Diga se são homeomorfismos ou difeomorfismos.

A1.2) Mostre que a transformação do plano \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} w &= ax + by + bx^2 \\ z &= -bx + ay + ax^2 \end{cases}$$

com $a = \cos(2\pi\nu)$ e $b = \sin(2\pi\nu)$ é um difeomorfismo.

A1.3) Faça os gráficos de funções sobrejectivas, injectivas e bijectivas.

A.2 Variedades

Uma variedade de dimensão n é um espaço topológico separado que é localmente semelhante ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Por exemplo, um ponto de \mathbb{R}^n é uma variedade de dimensão 0, um aberto de \mathbb{R}^n é uma variedade de dimensão n .

Outros exemplos de variedades são as esferas de dimensão n , S^n , definidas através das equações $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ e os toros $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (figura A.1).

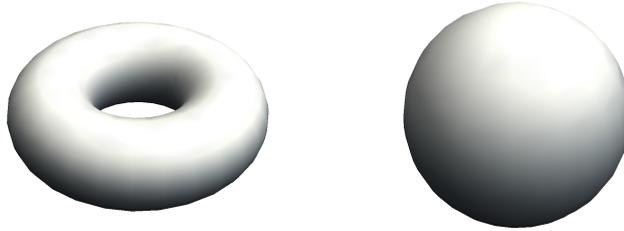


Figura A.1: Exemplos de variedades compactas de dimensão 2: toro T^2 e esfera S^2 .

A esfera e o toro são variedades de dimensão 2 que têm uma boa representação em \mathbb{R}^3 e, como se percebe intuitivamente, são localmente difeomorfas a \mathbb{R}^2 . Para o círculo S^1 , $x^2 + y^2 = 1$, o intervalo aberto $(0, 2\pi)$ é uma imagem de $S^1 - (0, 0)$ por um difeomorfismo (figura A.2).

Veja-se agora uma definição mais formal de variedade. Seja M um conjunto com uma estrutura de espaço topológico separado. Uma *carta local* de

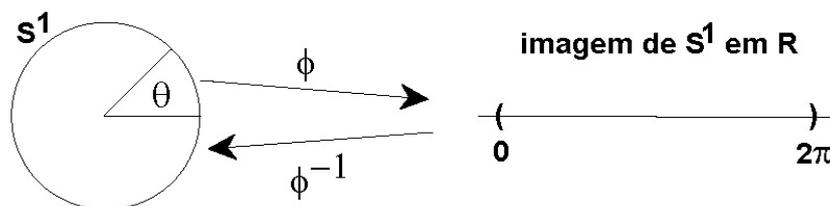


Figura A.2: Imagem de uma circunferência ($S^1 - (0, 0)$) por um difeomorfismo ϕ .

M é um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ que é a imagem de um aberto $U \subset M$ pelo homeomorfismo (difeomorfismo) $\phi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ (figura A.3).

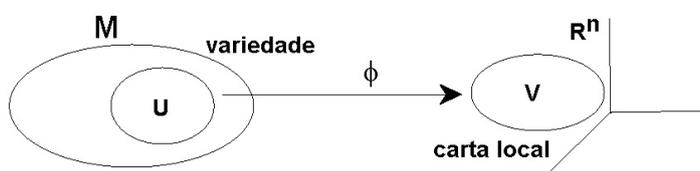


Figura A.3: Carta local de uma variedade.

Em geral existem várias cartas locais de M que se designam por (U_i, ϕ_i, V_i) . As cartas (locais) designam-se também por *sistemas de coordenadas* (locais), pois, $\phi(m \in M) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Considerem-se duas cartas locais sobre M , com intersecção não vazia. Sejam (U_j, ϕ_j, V_j) e (U_i, ϕ_i, V_i) cartas tais que, $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Assim os conjuntos U_i e U_j têm imagens nas duas cartas V_i e V_j . Sejam $V_{ij} = \phi_i(U_{ij})$ e $V_{ji} = \phi_j(U_{ij})$ (figura A.4).

Como por hipótese ϕ_i e ϕ_j são homeomorfismos ou difeomorfismos, pode-se passar de V_{ij} para V_{ji} através de $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$, e $\phi_{ji} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : V_{ji} \rightarrow V_{ij}$. Nestas condições, as cartas (U_i, ϕ_i, V_i) e (U_j, ϕ_j, V_j) são *compatíveis* se:

- i) O conjunto U_{ij} é aberto ou \emptyset .
- ii) As funções ϕ_{ij} e ϕ_{ji} , com $U_{ij} \neq \emptyset$, são homeomorfismos ou difeomorfismos.

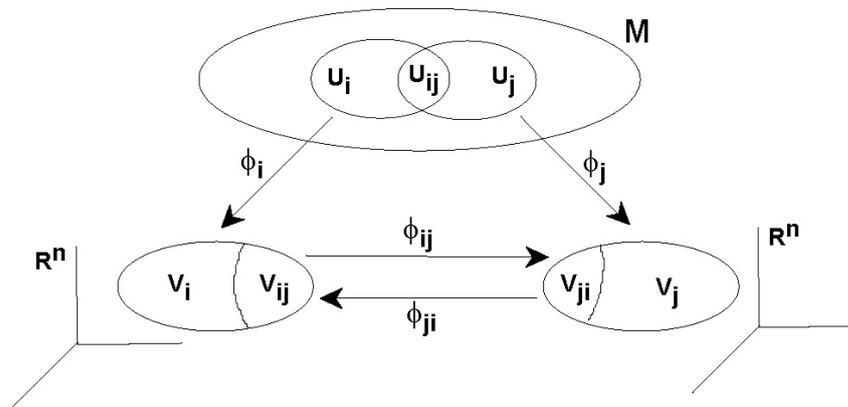


Figura A.4: Compatibilidade entre cartas de uma variedade.

As duas condições anteriores definem uma estrutura topológica ou diferencial sobre a variedade.

Chama-se atlas sobre M ao conjunto de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, V_i), i = 1, 2, \dots\}$ que verificam:

- i) As cartas são compatíveis duas a duas.
- ii) Todo o ponto de M tem imagem em pelo menos uma carta.

Uma variedade ou uma estrutura de variedade sobre M é a classe dos atlas equivalentes sobre M . Dois atlas são equivalentes se as cartas do primeiro atlas são compatíveis com as cartas do segundo atlas. Se os ϕ_{ij} e ϕ_{ji} são de classe C^0 (homeomorfismos) M é uma variedade topológica. Se as funções ϕ_{ij} e ϕ_{ji} são de classe C^k , com $1 \leq k \leq \infty$, M é uma variedade diferenciável. Se as funções ϕ_{ij} e ϕ_{ji} são analíticas, M é uma variedade analítica.

Exemplo A.3. Toro T^2 . O toro é gerado pelo produto de dois círculos S^1 , $T^2 = S^1 \times S^1$, como se mostra na figura A.5.

Uma representação paramétrica do toro T^2 em \mathbb{R}^3 é definida pela função

$$(\cos \theta(2 + \cos \alpha), \sin \theta(2 + \cos \alpha), \sin \alpha),$$

em que $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\alpha \in (0, 2\pi)$. Assim, uma carta do toro é o conjunto

$$V = \{(\theta, \alpha) : \theta \in (0, 2\pi) \text{ e } \alpha \in (0, 2\pi)\},$$

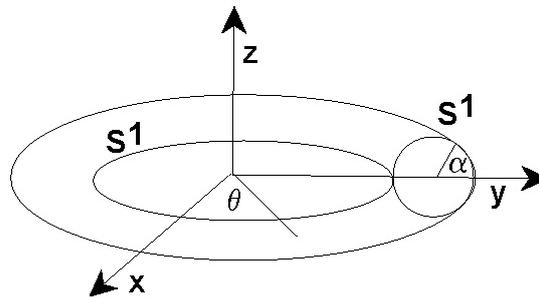


Figura A.5: Toro T^2 como produto de dois círculos S^1 .

e a aplicação $\phi : U \rightarrow V$ é definida através de

$$\phi^{-1} : (\theta, \alpha) \rightarrow (\cos \theta(2 + \cos \alpha), \sin \theta(2 + \cos \alpha), \sin \alpha) \subset \mathbb{R}^3.$$

Na figura A.6, está representada uma imersão do toro T^2 em \mathbb{R}^3 , assim como a carta canónica ou usual do toro.

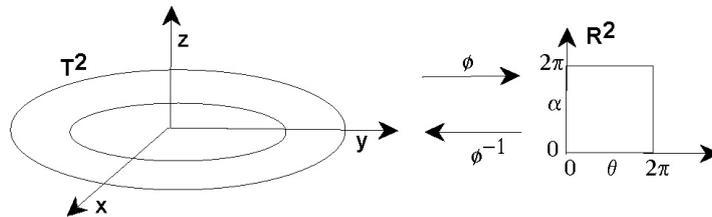


Figura A.6: Toro T^2 e carta canónica do toro em \mathbb{R}^2 .

A carta V não descreve todos os pontos sobre o toro, sendo necessárias pelo menos mais duas cartas. No entanto, do ponto de vista das aplicações, o estudo de dinâmicas sobre o toro é equivalente ao estudo de dinâmicas sobre o quadrado, desde que se identifiquem os extremos dos intervalos. Isto é, pode-se sempre trabalhar no conjunto

$$V = \{(\theta, \alpha) : \theta \in (0, 2\pi), \alpha \in (0, 2\pi)\},$$

em que se identificam as rectas $\theta = 2\pi$ e $\alpha = 2\pi$ com as rectas $\theta = 0$ e $\alpha = 0$, respectivamente. Assim, as variáveis da carta de T^2 , θ e α , são designadas por coordenadas locais do toro. Do ponto de vista geométrico a carta V corresponde a fazer a *cirurgia* ou a sequência de transformações como indicado na figura A.7.

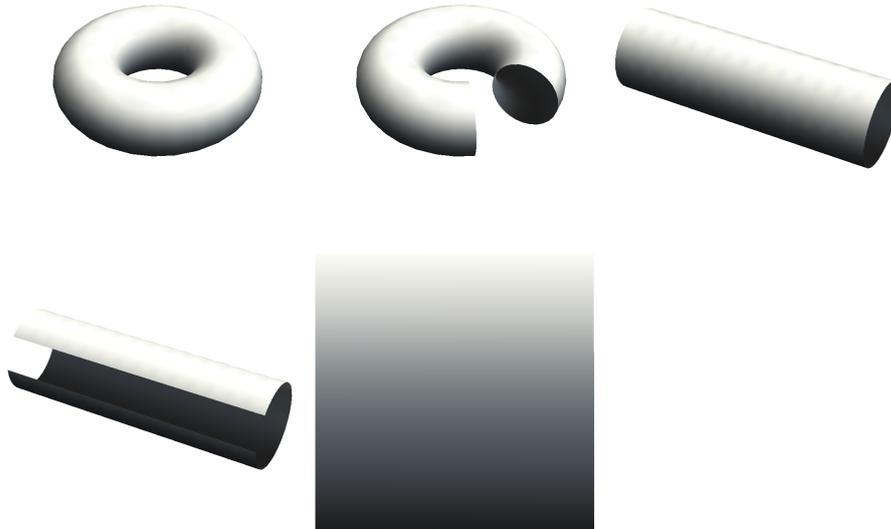


Figura A.7: Cirurgia do toro: sequência de suturas e deformações que transformam o toro num quadrado.

Exemplo A.4. Aplicação projectiva da esfera S^2 . Seja S^2 a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e sejam as aplicações projectivas com centros no pólo norte e no pólo sul (figura A.8):

$$f_n(x, y, z \in S^2) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad z \neq 1$$

$$f_s(x, y, z \in S^2) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \quad z \neq -1.$$

O atlas de S^2 é constituído pelas cartas $(S^2 - \{n\}, f_n, \mathbb{R}^2)$ e $(S^2 - \{s\}, f_s, \mathbb{R}^2)$. Como $f_s \circ f_n^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ e $f_n \circ f_s^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ são

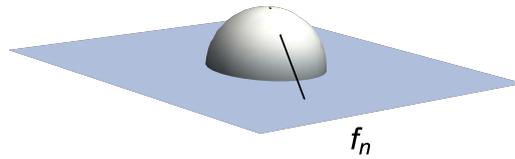


Figura A.8: Aplicação projectiva da esfera com centro no polo norte.

difeomorfismos, pois

$$F(u, v) = f_s \circ f_n^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

e a esfera S^2 é uma variedade diferenciável e analítica.

Seja M uma variedade diferenciável compacta de \mathbb{R}^n . Uma curva em M é uma aplicação $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$. Chama-se espaço tangente no ponto $x \in M$ ao conjunto dos vectores velocidade de todas as curvas que passam pelo ponto $x \in M$. O espaço tangente no ponto x da variedade M designa-se por TM_x .

Os elementos do espaço tangente são os vectores tangentes. No círculo S^1 , o espaço tangente a um ponto x é a recta \mathbb{R} . Para a esfera S^2 o espaço tangente a um ponto $x \in S^2$ é o plano, $TS_x^2 = \mathbb{R}^2$ (figura A.9).

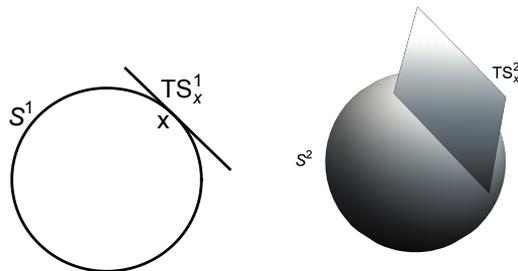


Figura A.9: Espaços tangentes à circunferência e à esfera.

Os elementos do espaço tangente num ponto são os vectores velocidade da

curva ψ , isto é,

$$\vec{v} = \left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0} \in TM_x,$$

nas coordenadas de M em \mathbb{R}^n .

O espaço tangente a uma ponto de uma variedade tem a mesma dimensão da variedade. O conjunto de todos os espaços tangentes a uma variedade é o fibrado tangente — $TM = \cup_{x \in M} TM_x$. O fibrado tangente tem dimensão $2n$, pois especificar um ponto de TM é equivalente a especificar um ponto $x \in M$ e o respectivo vector tangente $\vec{v} \in TM_x$. Assim, se $y \in TM$, $y = (x, \vec{v})$, em que $x \in M$ e $\vec{v} \in TM_x$.

Viram-se exemplos de variedades compactas de dimensão 2. No entanto, o exemplo da cirurgia do toro pode ser utilizado para construir outras variedades compactas de dimensão 2. Tomando como ponto de partida a carta do toro $((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$, pode-se agora identificar lados opostos com mudanças de sentido nas fronteiras. Na figura A.10 estão indicadas as três hipóteses possíveis de identificação.

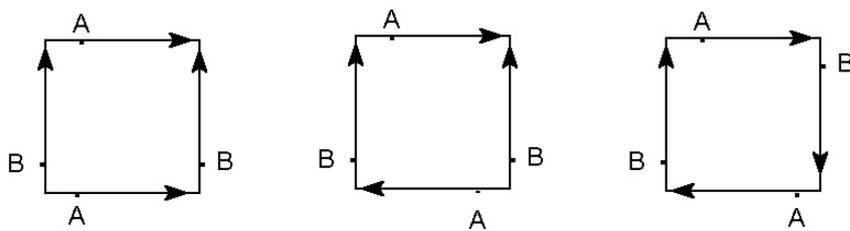


Figura A.10: Cartas do toro (a), da garrafa de Klein (b) e do plano projectivo (c). Os lados opostos do quadrado identificam-se e A e B representam o mesmo ponto da variedade.

No primeiro caso da figura A.10 obtém-se o toro, nos outros dois casos obtêm-se, respectivamente, a garrafa de Klein K^2 e o plano projectivo P^2 , ambas variedades compactas de dimensão 2 (figura A.11).¹

Na sua imersão em \mathbb{R}^3 , a garrafa de Klein apresenta pontos de cruzamento, contradizendo o facto de a aplicação da carta para a variedade ser um homeomorfismo. Está-se assim perante uma imersão não injectiva da garrafa de Klein. O mesmo tipo de cruzamentos aparecem na imersão do plano projectivo em \mathbb{R}^3 — superfície de Steiner. Em geral tem-se:

¹O plano projectivo P^2 é constituído pelo conjunto dos pontos antipodais da esfera S^2 .



Figura A.11: Toro, imersão não injectiva em \mathbb{R}^3 da garrafa de Klein e da superfície de Steiner (imersão não injectiva do plano projectivo).

Teorema A.5 (Whitney). *Se M^n é uma variedade compacta de dimensão n , então é sempre possível escolher um inteiro m , com $m \leq 2n + 1$, de modo a que M^n tenha uma imersão injectiva em \mathbb{R}^m .*

Na figura A.12 está representada outra carta da esfera S^2 .

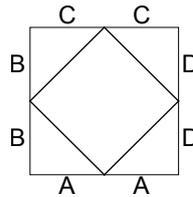


Figura A.12: Carta da esfera S^2 . Os lados A, B, C e D identificam-se e a área delimitada pelo losângulo corresponde à calote inferior da esfera.

A1.4) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que o gráfico de f , $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, é uma variedade.

A1.5) Determine uma carta da superfície definida por

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2 .$$

A1.6) Mostre que a aplicação $f_n : (S^2 - \{n\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ em que $f_n((x, y, z) \in S^2) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$ com $z \neq 1$ é um difeomorfismo.

Apêndice B

Equações diferenciais lineares

B.1 Equações autônomas

Os sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias são integráveis, no sentido em que é possível escrever uma solução geral com a dependência explícita no tempo e nas condições iniciais. Para sistemas lineares, todos os teoremas de bom comportamento das soluções são válidos: teorema de existência e unicidade e teorema do prolongamento das soluções quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Uma equação diferencial linear autônoma de ordem n pode aparecer numa das seguintes formas:

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x = 0 \quad (\text{B.1})$$

ou,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}, \quad (\text{B.2})$$

em que $x^{(n)} = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$. A equação (B.1) pode-se escrever na forma (B.2). Com a substituição de variáveis, $x_1 = x$, $x_2 = x^{(1)}$, \dots , $x_n = x^{(n-1)}$, a equação (B.1)

escreve-se na forma matricial (B.2), em que a matriz A tem a forma particular,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & & & & & -a_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

A matriz A designa-se por *matriz companheira* da equação (B.1). Vejamos então como obter as soluções gerais das equações diferenciais (B.1) e (B.2).

Solução geral da equação diferencial linear (B.1)

À equação diferencial (B.1) associa-se o polinómio característico,

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1} = 0.$$

Este polinómio tem raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, com $r \leq n$, e cada raiz tem multiplicidade m_i , com $\sum_{i=1}^r m_i = n$. A solução geral da equação diferencial (B.1) é

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^r p_i(t)e^{\lambda_i t},$$

em que $p_i(t) = \alpha_{i1}t^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{im_i-1}t + \alpha_{im_i}$ e os α_{ij} são constantes a determinar através das condições iniciais.

Por exemplo, a equação diferencial

$$x^{(3)} - 4x^{(2)} + 5x^{(1)} - 2x = 0 \quad (\text{B.4})$$

tem o polinómio característico

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$$

As raízes do polinómio característico são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, com multiplicidades 2 e 1, respectivamente. Então, a solução geral da equação diferencial (B.4) é

$$x(t) = (\alpha_{11}t + \alpha_{12})e^t + \alpha_2e^{2t},$$

em que α_{11} , α_{12} e α_2 são constantes a determinar. Com as condições iniciais, $x(t=0) = x_{00}$, $x'(t=0) = x_{10}$ e $x''(t=0) = x_{20}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -2x_{00} + 3x_{10} - x_{20} \\ \alpha_{12} &= 2x_{10} - x_{20} \\ \alpha_2 &= x_{00} - 2x_{10} + x_{20}. \end{aligned}$$

Solução geral da equação diferencial linear (B.2)

Para encontrar a solução geral da equação diferencial (B.2), começa-se por estender a equação real $\dot{x} = Ax$ ao plano complexo. Esta operação designa-se por complexificação da equação diferencial e consiste em deixar que $x \in \mathbb{C}^n$ e que a matriz A possa ter entradas complexas.

Suponha-se então que $\det A \neq 0$ e que todos os valores próprios de A são diferentes. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os valores próprios de A e $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ os respectivos vectores próprios. Como é bem conhecido da algebra linear, existem matrizes B e C , tais que, $C = B^{-1}AB$, em que,

$$B = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Introduzindo a nova variável (complexa), $y = B^{-1}x$, vem que

$$\dot{y} = B^{-1}\dot{x} = B^{-1}Ax = (B^{-1}AB)y = Cy,$$

ou seja, a equação diferencial (B.2) escreve-se na forma $\dot{y} = Cy$ em que C é uma matriz diagonal. Por analogia com a equação diferencial linear e homogénea em dimensão 1, $\dot{y}_i = \lambda_i y_i$, a solução geral do sistema $\dot{y} = Cy$ é

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} y_i(0), i = 1, \dots, n.$$

Invertendo a transformação de variáveis, $x = ByB^{-1}$, a solução geral da equação diferencial (B.2) é

$$\vec{x}(t) = B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} B^{-1} \vec{x}(0).$$

Exemplo B.1. Seja a equação diferencial do oscilador harmónico,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Neste caso, tem-se que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora, esta matriz tem os valores próprios, $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$, a que correspondem os vectores próprios, $p_1 = (1, i)$ e $p_2 = (1, -i)$. Assim, tem-se que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Como a matriz C é diagonal, vem que a solução geral da equação do oscilador harmónico é

$$x(t) = a_{11}e^{it} + a_{12}e^{-it} \quad y(t) = a_{21}e^{it} + a_{22}e^{-it}$$

e as quatro constantes a_{ij} determinam-se através das condições iniciais e das relações entre as soluções $x(t)$ e $y(t)$, definidas pelo sistema de equações diferenciais. Note-se que, para um sistema linear de n equações diferenciais existem n condições iniciais e $2n$ constantes a determinar.

B.2 Equações não autónomas

A teoria de Floquet das equações não autónomas é extensa. No entanto, pode-se resumir os resultados fundamentais.

A equação diferencial afim e não autónoma mais geral tem a forma

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad (\text{B.5})$$

em que $A(t)$ é uma matriz (contínua) e $b(t)$ é um vector. Considere-se a equação linear

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (\text{B.6})$$

Se ϕ_1 é uma solução da equação (B.5) e ϕ_2 uma solução da equação (B.6), tem-se que

$$\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 = A(t)(\phi_1 + \phi_2) + b(t).$$

Assim, $(\phi_1 + \phi_2)$ é uma solução de (B.5). Se x_0 é uma condição inicial para (B.5), com $\phi_2(0) = x_0$ e $\phi_1(0) = 0$, decorre que a solução geral da equação não homogénea (B.5) é a soma da solução geral da equação homogénea mais a solução particular da equação não homogénea para a condição inicial nula. Este resultado é bastante geral e vai-se reflectir na teoria de Floquet.

Para construir a teoria de Floquet começa-se por construir a equação matricial

$$\dot{M} = A(t)M, \quad (\text{B.7})$$

em que M é uma matriz. Escolhendo como condição inicial $M(0) = I$, a solução geral de (B.6) pode-se escrever na forma, $\phi(t, x_0) = M(t)x_0$. Seja então a solução $M(t)$ de (B.7) com a condição inicial $M(0) = I$. A matriz $M(t)$ designa-se por matrizante ou matriz fundamental das equações (B.5) e (B.6).

Caso seja possível encontrar um matrizante, da teoria de Floquet decorre que a solução geral de (B.5) é

$$\phi(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M^{-1}(s)b(s)ds. \quad (\text{B.8})$$

Exemplo B.2. Seja a equação diferencial não autónoma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sin(t) - \beta \cos(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

em que α e β são constantes. A equação para o matrizante é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

cujas solução é

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

para a condição inicial $m_{11}(0) = m_{22}(0) = 1$ e $m_{12}(0) = m_{21}(0) = 0$. Por (B.9) e introduzindo (B.10) em (B.8), a solução da equação (B.9) é

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &+ M(t) \begin{pmatrix} \int_0^t (-\alpha \sin^2(s) + \beta \cos(s) \sin(s)) ds \\ \int_0^t (\alpha \sin(s) \cos(s) - \beta \cos^2(s)) ds \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) \\ -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t\alpha \cos(t) + (\alpha - t\beta) \sin(t) \\ -t\beta \cos(t) + t\alpha \sin(t) - \beta \sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

B2.1) Determine a solução da equação diferencial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x,$$

para as condições iniciais $x_1(0) = 1.0$, $x_2(0) = 2.0$ e $x_3(0) = 3.0$.

Apêndice C

Equações às diferenças lineares

As equações às diferenças surgem como o resultado de aproximações às equações diferenciais ordinárias e às equações às derivadas parciais. Também podem aparecer em aplicações como equações associadas a modelos em que as variáveis independentes (espaciais ou temporais) são discretas. Por exemplo, considerem-se as equações

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (\text{C.1})$$

Com as aproximações às diferenças finitas

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x, t) + f(x - \Delta x, t) - 2f(x, t)}{(\Delta x)^2}, \quad (\text{C.2})$$

pode-se aproximar as duas equações em (C.1) por

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{(\Delta x)^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n), \quad (\text{C.3})$$

em que $x_n = x(t = n\Delta t)$, $f_i^n = f(x = i\Delta x, t = n\Delta t)$. Neste caso, as variáveis independentes n e i descrevem, respectivamente, a evolução temporal e espacial em intervalos discretos de tempo e espaço.

A forma geral da equação às diferenças linear em dimensão k é

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^1 \\ \vdots \\ x_{n+1}^k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

em que A é uma matriz de $k \times k$, n é a variável independente discreta que percorre os inteiros e $x_n^j \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

As equações às diferenças da forma

$$x_{n+k} + b_1 x_{n+k-1} + \dots + b_k x_n = 0 \quad (\text{C.5})$$

podem-se escrever na forma matricial através da substituição de variáveis $x_n^1 = x_n, x_n^2 = x_{n+1} \dots$ e $x_n^k = x_{n+k-1}$, em que a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_1 & \dots & \dots & \dots & -b_k \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Veja-se como determinar as soluções gerais da equação às diferenças (C.4), em que A é uma matriz não singular, $\det A \neq 0$. A solução de (C.4) tem a forma

$$\vec{x}_n = h(n, \vec{x}_0),$$

em que $\vec{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^k)^T$ é o vector das k condições iniciais.

Se $\det A \neq 0$, então existe uma matriz invertível B tal que, $BAB^{-1} = C$ e C é uma matriz diagonal, eventualmente complexa. Com $\vec{y} = B\vec{x}$, vem que

$$\vec{y}_{n+1} = BAB^{-1}\vec{y}_n = C\vec{y}_n. \quad (\text{C.7})$$

Ora, como (C.7) é um sistema de k equações independentes, a sua solução reduz-se à solução da equação unidimensional

$$y_{n+1} = \lambda y_n, \quad (\text{C.8})$$

em que $\lambda \in \mathbb{C}$. Dada a condição inicial y_0 , tem-se que $y_1 = \lambda y_0$, $y_2 = \lambda y_1 = \lambda^2 y_0$ e, por indução,

$$y_n = \lambda^n y_0. \quad (\text{C.9})$$

Assim, por (C.9), a solução geral de (C.7) é

$$\begin{pmatrix} y_n^1 \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_0^1 \\ \vdots \\ \lambda_k^n y_0^k \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Mas como, $\vec{y} = B\vec{x}B^{-1}$, $\vec{x} = B^{-1}\vec{y}B$, tem-se que

$$\begin{aligned}\vec{x}_n &= B^{-1}\vec{y}_nB = B^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_0^1 \\ \vdots \\ \lambda_k^n y_0^k \end{pmatrix} B \\ &= B^{-1} \left((\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n) \cdot (y_0^1, \dots, y_0^k)^T B \right) \\ &= B^{-1} \left((\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n) B \cdot \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^k \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} c_{11}\lambda_1^n & +c_{12}\lambda_2^n & +\dots & +c_{1k}\lambda_k^n \\ \vdots & & & \\ c_{n1}\lambda_1^n & +\dots & \dots & +c_{nk}\lambda_k^n \end{pmatrix},\end{aligned}$$

em que os c_{ij} são constantes a determinar através das matrizes B e B^{-1} e das condições iniciais. Conclui-se assim que a solução geral da equação às diferenças linear (C.4) tem a forma

$$x_n^j = c_{j1}\lambda_1^n + \dots + c_{jk}\lambda_k^n,$$

em que os λ_i são os valores próprios da matriz A e os c_{ji} são constantes que dependem das condições iniciais.

Exemplo C.1. Equação de Fibonacci. Seja a equação às diferenças

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad (\text{C.11})$$

com as condições iniciais x_0 e x_1 . Com as variáveis $x_{n+1} = y_n$, a equação (C.11) escreve-se na forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = y_n + x_n \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz A são $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ e a solução geral da equação (C.11) é

$$\begin{aligned}x_n &= c_{11} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_{12} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ y_n &= c_{21} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_{22} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.\end{aligned}$$

Para $n = 0$, e $n = 1$ vem que

$$\begin{aligned}x_0 &= c_{11} + c_{12} \\y_0 &= c_{21} + c_{22} \\x_1 &= y_0 = c_{11} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_{12} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\y_1 &= y_0 + x_0 = c_{21} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_{22} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right).\end{aligned}$$

Resolvendo este sistema em ordem aos c_{ij} , obtém-se

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{1}{2}x_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}}y_0 \\c_{12} &= \frac{1}{2}x_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}}y_0 \\c_{21} &= \frac{1}{\sqrt{5}}x_0 + \frac{1}{2}y_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\c_{22} &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x_0 + \frac{1}{2}y_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)\end{aligned}$$

e a solução geral da equação de Fibonacci está assim determinada.

Particularizando as condições iniciais para $x_0 = 1, x_1 = y_0 = 1$, vem que

$$x_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

que é um número inteiro para qualquer n , como pode ser facilmente verificado por (C.11): $x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 8, \dots, x_{10} = 89, etc..$

A3.1) Determine a solução geral da equação às diferenças

$$x_{n+2} + x_n = 0.$$

Apêndice D

Transformações de escala

As equações que descrevem modelos de sistemas físicos ou biológicos têm em geral dimensões físicas e dependem de vários parâmetros. Muitos dos parâmetros dos modelos não dependem linearmente entre si e as soluções dos modelos podem ser pouco sensíveis a variações particulares de parâmetros. Por outro lado, muitas das variáveis podem ter soluções em regiões de variação das variáveis muito particulares e difíceis de encontrar. As transformações de escala das equações dos modelos permite reduzir o número de parâmetros dos modelos e determinar algumas das propriedades essenciais dos modelos.

Como exemplo, vai-se adimensionalizar a equação logística de crescimento populacional, encontrando a forma mais simples para analisar as soluções desta equação. A equação logística escreve-se na forma

$$\frac{dN}{dt} = rN(K - N), \quad (\text{D.1})$$

em que N é o número de indivíduos de uma população, ou uma concentração. Designem-se as unidades de N por $[N]$. As constantes r e K , têm unidades $[N]^{-1}s^{-1}$ e $[N]$, respectivamente. Para adimensionalizar a equação (D.1), introduzem-se as novas variáveis (transformações de escala)

$$x = \alpha N \quad \text{e} \quad \tau = \gamma t, \quad (\text{D.2})$$

em que α e γ são constantes a determinar e x e τ são novas variáveis. Introduzindo (D.2) em (D.1), obtém-se

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{\gamma} r K x - \frac{1}{\alpha \gamma} r x^2. \quad (\text{D.3})$$

Escolhendo os seguintes valores para as constantes compostas

$$\frac{1}{\gamma}rK = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha\gamma}r = 1. \quad (\text{D.4})$$

Das relações (D.4) resulta que

$$\gamma = rK, \alpha = \frac{1}{K}, x = \frac{N}{K} \quad \text{e} \quad \tau = rKt. \quad (\text{D.5})$$

Assim, a equação adimensionalizada do modelo logístico reduz-se a

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x). \quad (\text{D.6})$$

Do ponto de vista qualitativo, todas as soluções da equação logística (D.1) reduzem-se às soluções da equação adimensional (D.6), independentemente dos parâmetros N e r .

Em muitos casos, não é possível eliminar completamente a dependência nos parâmetros, pelo que nessas situações as novas equações são mais simples, mas têm dimensões dependentes das escolhas feitas para as transformações de escala.

Bibliografia

- [Andronov *et al.*, 1966] A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Khaikin, Theory of Oscillators, Pergamon, Oxford, 1966.
- [Arnold *et al.*, 1968] V. I. Arnold e A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968.
- [Arnold, 1974] V. I. Arnold, Équations Différentielles Ordinaires. Mir, Moscovo, 1974.
- [Arnold, 1980] V. I. Arnold, Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires. Mir, Moscovo, 1980.
- [Arrowsmith *et al.*, 1990] D. K. Arrowsmith e C. M. Place, An Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1990.
- [Astrom *et al.*, 2000] K. J. Astrom and K. Furuta, Swinging up a pendulum by energy control, Automatica, **36**(2) (2000) 287-295.
- [Barnsley, 1993] M. Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press, Boston, 1993.
- [Behringer, 1985] - R. P. Behringer, Rayleigh-Bénard convection and turbulence in liquid helium, Rev. Mod. Phys. 57 (1985) 657-684.
- [Benedicks *et al.*, 1991] M. Benedicks e L. Carleson, The dynamics of the Hénon map, Annals of Mathematics 133 (1991) 73-169.
- [Benettin *et al.*, 1980a] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli e J.-M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, Meccanica **15** (1980) 9-20.

- [Benettin *et al.*, 1980b] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli e J.-M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian syatems; a method for computing all of them. Part 2: Numerical applications, *Meccanica* **15** (1980) 21-30.
- [Bennett *et al.*, 2002] M. Bennett, M.F. Schatz, H. Rockwood, K. Weisenfeld, Huygens's clocks, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 458 (2002) 563-579.
- [Beutler, 2005] G. Beutler, *Methods of Celestial Mechanics*, Springer, 2005.
- [Berglund, 2001] N. Berglund, *Geometrical Theory of Dynamical Systems*, arXiv:math/0111177v1.
- [Birkhoff *et al.*, 1978] G. Birkhoff e G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1978.
- [Broer *et al.*, 2011] H. Broer e F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2011.
- [Braun, 1970] M. Braun, Particle motions in a magnetic field, *J. Diff. Equ.*, **8** (1970) 294-332.
- [Braun, 1979] M. Braun, On the stability of the Van Allen radiation belt, *SIAM J. Appl. Math.*, **37** (1979) 664-668.
- [Braun, 1981] M. Braun, Mathematical remarks on the Van Allen radiation belt: a survey of old and new results, *SIAM Review*, **23** (1981) 61-93.
- [Carr, 1991] J. Carr, *Applications of centre manifold theory*. Springer, New-York, 1991.
- [Cascais *et al.*, 1983] J. Cascais, R. Dilão e A. Noronha da Costa, Chaos and reverse bifurcations in a RCL circuit, *Phys. Lett.* 93A (1983) 213-216.
- [Cesary, 1963] L. Cesary, *Asymptotic behavior and stability problems in differential equations*, D. C. Heath and Company, Boston, 1963.
- [Cordovil *et al.*, 1986] R. Cordovil, R. Dilão e A. Noronha da Costa, Periodic Orbits for Additive Cellular Automata, *Discrete and Computational Geometry*, 1 (1986) 277-288.
- [Chillingworth, 1976] D. R. J. Chillingworth, *Differential Topology with a view to applications*, Pitman Publishing, 1976.

- [Collet e Eckmann, 1980] P. Collet e J.-P. Eckmann, Iterated maps on the interval as Dynamical Systems, volume 1 of Progress in Physics, Birkhäuser, Boston.
- [Collet e Eckmann, 2006] P. Collet e J.-P. Eckmann, Concepts and results in chaotic dynamics, Springer, Berlin, 2006.
- [Cvitanović *et al.*] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan and A. Wirzba, Chaos: Classical and Quantum. <http://chaosbook.org/>.
- [Denjoy, 1932] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. Pures Appl.* **11** (1932) 333-375.
- [Devaney, 1986] R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, The Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1986.
- [DeVogelaere, 1958] R. DeVogelaere, On the structure of symmetric periodic solutions of conservative systems, with applications. In S. Lefschetz (ed.) Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, pp. 53-84. Princeton University Press, Princeton, 1958.
- [Dias de Deus *et al.*, 1987] J. Dias de Deus, R. Dilão and A. Noronha da Costa, Scaling Behaviour of Windows and Intermittency in One-Dimensional Maps, *Physics Letters A*, 124 (1987) 433-436.
- [Dias de Deus *et al.*, 1989] J. Dias de Deus, R. Dilão and A. Noronha da Costa, Phenomenology of Periodic Windows in One-Dimensional Maps, *Europhysics Letters*, 9 (1989) 303-308.
- [Dilão, 1989] R. Dilão, Periodic Points and Entropies for Cellular Automata, *Complex Systems*, 3 (1989) 117-128.
- [Dilão, 1993] R. Dilão, Autómatos celulares, máquinas de Turing ou a natureza como máquina de cálculo, *Colóquio Ciências*, 12 (1993) 3-20.
- [Dilão, 1993b] R. Dilão, Nonlinear Phenomena in Circular Particle Accelerators I. Sextupolar Nonlinearities, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3** (1993) 1083-1102.
- [Dilão *et al.*, 1996] R. Dilão e R. Alves-Pires, Nonlinear Dynamics in Particle Accelerators, World Scientific, 1996.

- [Dilão, 2006] R. Dilão, Mathematical Models in Population Dynamics and Ecology. In *Biomathematics: Modelling and Simulation*, J. C. Misra (ed.), Chapter 15, pp. 399-449, World Scientific, 2006, ISBN 981-238-110-4.
- [Dilão e Alves-Pires, 2008] R. Dilão e R. Alves-Pires, Chaos in the Störmer problem. In V. Staicu (ed.), “Differential Equations, Chaos and Variational Problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 75, chapter 14, pp. 175-194, ISBN: 978-3-7643-8481-4, Birkhäuser, 2008.
- [Dilão, 2009] R. Dilão, Anti-phase and in-phase synchronization of nonlinear oscillators: The Huygens’s clocks system, *Chaos*, 19 (2009) 023118.
- [Dilão, 2009b] R. Dilão, On the problem of synchronization of identical dynamical systems: The Huygen’s clocks. In A. Frediani and G. Butazzo (Eds.), “Variational Methods in Aerospace Engineering, Springer Optimization and its Applications, Vol. 33, Cap. 10, pp. 163-181, Springer-Verlag, ISBN: 978-0-387-95856-9, 2009.
- [Dilão, 2014] R. Dilão, Anti-phase synchronisation and ergodicity in arrays of oscillators coupled by an elastic force, *European Physical Journal Special Topics*, 223 (2014) 665-676.
- [Dilão, 2015] R. Dilão, Preprint- Robustez.
- [Dilão e Murteira, 2019] R. Dilão e M. Murteira, Principal periodic orbits of the Keplerian dumbbell system, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, in press, 2019.
- [Dragt, 1965] A. J. Dragt, Trapped Orbits in a Magnetic Dipole Field, *Rev. Geophysics*, 3 (1965) 255-298.
- [Dragt e Finn, 1976] A. J. Dragt and J. M. Finn, Insolubility of trapped particle motion in a magnetic dipole field, *J. Geophys. Res.*, 81 (1976) 2327-2340.
- [Frisch *et al.*, 1986] U. Frisch, B. Hasslacher and Y. Pomeau, Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 1505-1508.
- [Feigenbaum, 1978] M. J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* 19 (1978) 25-52.

- [Fitzpatrick, 2012] R. Fitzpatrick, *An Introduction to Celestial Mechanics*, Cambridge, 2012.
- [Glass *et al.*, 1979] L. Glass e M. C. Mackey, Pathological physiological conditions resulting from instabilities in physiological control systems, *Ann. NY. Acad. Sc.* 316 (1979) 214-235.
- [Grassberger *et al.*, 1983] L. Grassberger e M. C. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 347-349.
- [Guckenheimer e Holmes, 1983] J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems and bifurcations of Vector fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [Hairer *et al.*, 2002] E. Hairer, C. Lubich e G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, Springer-Verlag, 2002.
- [Haken, 1983] H. Haken, At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory on an attractor does not contain a fixed point, *Phys. Lett. A* **94** (1983) 71-72.
- [Hartman, 1982] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1982.
- [Hasselblatt e Katok, 1999] B. Hasselblatt e A. Katok, *A Moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos*, 1999.
- [Hasselblatt e Katok, 2003] B. Hasselblatt e A. Katok, *A First Course in Dynamics*, Cambridge University Press, 2003.
- [Hénon, 1969] M. Hénon, Numerical study of quadratic area-preserving mappings, *Quart. Appl. Math.* **27** (1969) 291-312.
- [Hirsch *et al.*, 1970] M. Hirsch e Ch. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets, *Proc. Symp. Pure Math.* **14** (1970) 133-163.
- [Hirsch *et al.*, 2004] M. W. Hirsch, S. Smale e R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Academic Press (Elsevier), 2004.
- [Hurwitz, 1895] A. Hurwitz, On the Conditions under which an Equation has only Roots with Negative Real Parts, *Mathematische Annalen*, 46, (1895)

- 273-284. Reprinted in "Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory", R. Bellman, R. Kalaba (Ed.), Dover, New York, 1964.
- [Kapitaniak *et al.*, 2012] M. Kapitaniak, K. Czolczynski, P. Perlikowski, A. Stefanski, T. Kapitaniak, Synchronization of clocks, *Physics Reports*, **517** (2012) 1-69.
- [Koon *et al.*, 2000] W. S. Koon, Martin W. Lo, J. E. Marsden e S. D. Ross, Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics, *Chaos*, **10**(2000) 427-469.
- [Kortweg, 1906] D. J. Kortweg, Les Horloges Sympathiques de Huygens, *Archives Neerlandaises, Series II*, Tome XI, pp. 273-295, Martinus Nijhoff, The Hague, 1906.
- [Kuramoto, 1984] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Kuznetsov, 1998] E. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1998.
- [Libchaber *et al.*, 1980] A. Libchaber e J. Maurer, A Rayleigh-Bénard experiment: Helium in a small box, *J. Phys. Coll.*, **41** C3 (1980) 51.
- [Lichtenberg e Lieberman, 1983] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Lorenz, 1963] E. Lorenz, Deterministic non-periodic flow, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130-141.
- [May, 1976] R. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976) 459-467.
- [Milnor, 2006] J. W. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable (Third Edition)*, *Annals of Mathematics Studies* 160, Princeton University Press, 2006.
- [Misiurewicz, 1983] M. Misiurewicz, Maps of an interval, *In Chaotic Behaviour of Deterministic Systems, Les Houches Session XXXVI*, Ioss, G., Helleman, R. H. G. and Stora (Ed.), R., North-Holland, 1983.
- [Murray e Dermott, 1999] C. D. Murray e S. F. Dermott, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, 1999.

- [Musielak e Quarles, 1999] Z. E. Musielak e B. Quarles, The three-body problem, *Rep. Prog. Phys.* **77** (2014) 065901.
- [Nemitskii e Stepanov, 1960] V. V. Nemitskii e V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, 1960.
- [Noronha da Costa, 1987] A. Noronha da Costa, *Chaos and intermittency in a nonlinear forced circuit*, PhD Thesis, in Portuguese, IST, 1987.
- [Pars, 1965] L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinmann, London, 1965.
- [Pantaleone, 2002] J. Pantaleone, Synchronization of metronomes, *Am. J. of Physics*, **70** (2002) 992-1000.
- [Pikovsky *et al.*, 2001] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Pomeau *et al.*, 1980] Y. Pomeau e P. Manneville, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Comm. Math. Phys.* **74** (1980) 89-197.
- [Pontriaguine *et al.*, 1974] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishchenko, *Théorie mathématique des processus optimaux*, MIR, 1974.
- [Reynolds, 1883] O. Reynolds, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistances in parallel channels, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **174** (1883) 935-982.
- [Rikitake e Honkura, 1985] T. Rikitake e Y. Honkura, *Solid Earth Geomagnetism*, Terra Scientific Publishing Co., Tokyo, 1985.
- [Romer, 1985] D. Romer, *Advanced macroeconomics*, McGraw-Hill, New York, 1996.
- [Ruelle, 1989] D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge Uni. Press, 1989.

- [Ruelle, 2006] D. Ruelle, What is a strange attractor?, Notices of the AMS, 53(7) (2006) 764-765.
- [Siegel *et al.*, 1971] C. L. Siegel e J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [Singer, 1978] D. Singer, Stable orbits and bifurcations of maps of the Interval, SIAM J. Appl. Math. 35 (1978) 260-267.
- [Sitnikov, 1960] K. Sitnikov, The existence of oscillatory motions in the three-body problem, Soviet Physics Doklady 5 (1960) 647-650.
- [Smale, 1967] S. Smale, Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 747-817.
- [Smith, 2011] H. Smith, An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences, Springer 2011.
- [Sotomayor, 1979] J. Sotomayor, Lições de equações diferenciais ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [Stefan, 1977] P. Stefan, A theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, Comm. Math. Phys. 54 (1977) 237-248.
- [Störmer, 1955] C. Störmer, The Polar Aurora, Oxford at the Clarendon Press, Oxford, 1955.
- [Strogatz *et al.*, 1993] S. H. Strogatz e I. Stewart, Coupled oscillators and biological synchronization, Scient. Am., 269(6) (1993) 68-75.
- [Strogatz, 1993] - C. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1994.
- [Suvakov *et al.*, 2013] M. Suvakov e V. Dmitrasinovic, Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits, Phys. Rev. Lett. 110 (2013) 114301.
- [Takens, 1980] F. Takens, Detecting Strange Attractors in Turbulence, in Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980, ed. D.A. Rand and L.-S. Young, Lecture Notes in Mathematics, 898, Springer-Verlag.

- [Underwood *et al.*, 1994] C. Underwood, D. Brock, P. Williams, S. Kim, R. Dilão, P. Ribeiro Santos, M. Brito, C. Dyer e A. Sims, Radiation Environment Measurements with the Cosmic Ray Experiments On-Board the KITSAT-1 and PoSAT-1 Micro-Satellites, *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, **41** (1994) 2353-2360.
- [Van Allen e Frank, 1959] J. A. Van Allen e L. A. Frank, Radiation Around the Earth to a Radial Distance of 107,400 KM, *Nature*, **183** (1959) 430-434.
- [Whitley, 1983] D. Whitley, Discrete dynamical systems in dimensions one and two, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 177-217.
- [Wisdom *et al.*, 1984] J. Wisdom, S. J. Peale and F. Mignard, The chaotic rotation of Hyperion, *Icarus* **58** (1984) 137-152.
- [Wisdom, 1987] J. Wisdom, Urey Prize Lecture: Chaotic dynamics in the solar system, *Icarus* **72** (1987) 241-275.
- [Wolf-Gladrow, 2000] D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*, Springer-Verlag, 2000.
- [Wolfram, 1983] S. Wolfram, Statistical Mechanics of Cellular Automata, *Rev. Mod. Phys.*, **55** (1983) 601-644.

Para os leitores com formação em física e engenharia, uma das referências introdutórias para o estudo da teoria dos sistemas dinâmicos é o livro de Guckenheimer e Holmes [[Guckenheimer e Holmes, 1983](#)]. No primeiro capítulo faz-se um percurso sobre a linguagem básica da teoria dos sistemas dinâmicos, estando implícito que se têm alguns conhecimentos básicos de equações diferenciais ordinárias. É uma das referências clássicas para aprender sistemas dinâmicos. Uma referência em que são explorados aspectos mais geométricos, incluindo uma discussão sobre a teoria KAM e alguns aspectos da teoria ergódica, é o livro de Broer e Takens [[Broer *et al.*, 2011](#)]. O livro de Strogatz [[Strogatz, 1993](#)] é uma introdução dirigida a físicos e engenheiros. Para uma introdução aos sistemas dinâmicos, sem conhecimento prévio de equações diferenciais e álgebra linear, o livro de Hirsh, Smale e Devaney [[Hirsch *et al.*, 2004](#)] dá todas as bases necessárias. Inclui alguns capítulos de aplicações e tem uma introdução excelente à noção de estabilidade estrutural, conceito central na teoria moderna dos sistemas dinâmicos. Este livro tem ainda alguns capítulos dedicados a aplicações. É possível encontrar na net outras

referências, entre as quais podemos seleccionar a obra de Cvitanovich [Cvitanović *et al.*] e a curso de Berglund [Berglund, 2001]. A Wikipedia é também uma excelente referência.

Para os leitores com formação universitária em matemática, o livro de Arnold [Arnold, 1974] é uma referência fundamental para quem trabalha em sistemas dinâmicos. Neste livro, introduz-se a teoria geométrica dos sistemas dinâmicos, preparando o leitor para alguns aspectos mais modernos da teoria. O livro de Arnold [Arnold, 1980] aborda assuntos mais avançados. Uma alternativa aos livros de Arnold e que contem de uma forma bastante estruturada os resultados mais recentes da teoria dos sistemas dinâmicos é o livro de Arrowsmith e Place [Arrowsmith *et al.*, 1990]. É uma referência indispensável para muitos aspectos técnicos da teoria. Uma alternativa com um pendor mais formal são os livros de Hasselblatt e Katok, [Hasselblatt e Katok, 1999] e [Hasselblatt e Katok, 2003], e de Broer e Takens [Broer *et al.*, 2011]. O tratado mais completo sobre equações diferenciais é o livro de Hartman [Hartman, 1982]. Para estudar sistemas dinâmicos associados a mapas do intervalo, aconselham-se os livros de Devaney [Devaney, 1986] e de Collet e Eckmann [Collet e Eckmann, 1980] e [Collet e Eckmann, 2006]. [Milnor, 2006] é uma introdução muito completa ao estudo dos sistemas dinâmicos discretos no plano complexo.